Método Axiomático e Teorias Formais

#08

Relembrando...

Teoria Formal:

- Linguagem formal (símbolos e regras de formação de fórmulas)
- Aparato dedutivo (axiomas e regras de inferência)

Teorias de Primeira Ordem

Definição 1 – Seja $\mathcal{L}$ uma linguagem formal de primeira ordem. Uma teoria de primeira ordem na linguagem $\mathcal{L}$ é uma teoria formal $\mathbb{K}$ definida da seguinte maneira:

a) Os símbolos e fórmulas bem formadas de $\mathbb{K}$ são os mesmos de $\mathcal{L}$.

b) Os axiomas de $\mathbb{K}$ são divididos em dois grupos: AXIOMAS LÓGICOS e AXIOMAS PRÓPRIOS.

Teorias de Primeira Ordem

AXIOMAS LÓGICOS

Se B, C, D são fórmulas de $\mathcal{L}$, então os axiomas lógicos de $\mathbb{K}$ são os seguintes:

(A1) $\big(B \to (C \to D)\big)$
(A2) $\big(B \to (C \to D)\big) \to \big((B \to C) \to (B \to D)\big)$
(A3) $\Big((\neg C \to \neg B) \to \big((\neg C \to B) \to C\big)\Big)$

Mesmos da lógica proposicional

Teorias de Primeira Ordem

AXIOMAS LÓGICOS

Se B, C, D são fórmulas de $\mathcal{L}$, então os axiomas lógicos de $\mathbb{K}$ são os seguintes:

(A4) $\big((\forall x_i)B(x_i)\big) \rightarrow B(t)$, em que $B(x_i)$ é uma fórmula de $\mathcal{L}$ e t é um termo de $\mathcal{L}$ que é livre para x_i em $B(x_i)$.
(A5) $(\forall x_i)(B \rightarrow C) \rightarrow (B \rightarrow (\forall x_i)C)$, se B não contém ocorrências livres de x_i.

Teorias de Primeira Ordem

AXIOMAS PRÓPRIOS

São axiomas específicos da teoria.

Observação: Quando o conjunto de axiomas próprios de uma teoria é vazio, nós temos uma teoria formal para a lógica de predicados (ou lógica clássica de primeira ordem).

Teorias de Primeira Ordem

Definição 1 – Seja $\mathcal{L}$ uma linguagem formal de primeira ordem. Uma teoria de primeira ordem na linguagem $\mathcal{L}$ é uma teoria formal $\mathbb{K}$ definida da seguinte maneira:

c) Temos duas regras de inferência:

- Modus Ponens (MP)
  - A partir de B e $(B \rightarrow C)$ podemos concluir C.
- Generalização (Gen)
  - A partir de B podemos concluir $(\forall x_i)B$.

Teorias de Primeira Ordem com Igualdade

Definição 2 – Seja $\mathbb{K}$ uma teoria de primeira ordem que possui a letra predicativa A_1^2 em sua linguagem. Vamos escrever $x_i = x_j$ como abreviação de $A_1^2(x_i, x_j)$. Então, $\mathbb{K}$ é uma teoria de primeira ordem com igualdade se as seguintes fórmulas são teoremas de $\mathbb{K}$:

(A6) $(\forall x_i)x_i = x_i$

(A7) $x_i = x_j \rightarrow \Big(B(x_i, x_i) \rightarrow B\big(x_i, x_j\big)\Big)$, em que x_i e x_j são variáveis quaisquer, $B(x_i, x_i)$ uma fórmula qualquer e $B\big(x_i, x_j\big)$ é obtida de $B(x_i, x_i)$ substituindo-se alguma ocorrência livre de x_i por x_j, desde que x_j seja livre para x_i em $B(x_i, x_i)$.

Número Imaginário

numeroimaginario.com.br